**CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN HÀM ẨN, HÀM HỢP**

**I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN**

**1. Định nghĩa tích phân**

**1.1. Định nghĩa**

Cho hàm số  thỏa:

+ Liên tục trên đoạn  .

+  là nguyên hàm của  trên đoạn .

Lúc đó hiệu số  được gọi là tích phân từ *a* đến *b* và kí hiệu 

**Chú ý:**

+ *a, b* được gọi là 2 cận của tích phân.

+ Tích phân không phụ thuộc và biến số, tức là .

**1.2. Tính chất của tích phân:**

+ .

+  với k là hằng số khác 0.

+ .

**1.3. Các phương pháp tính tích phân:**

- Sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

- Sử dụng phương pháp đổi biến số.

- Sử dụng phương pháp tính phân từng phần

**4. Một số kết quả đặc biệt**

**4.1. Tích phân của hàm chẵn, lẻ**

Nếu hàm số  liên tục và lẻ trên  thì .

Nếu hàm số  liên tục và chẵn trên  thì .

**4.2.** **Tích** **phân** **của** **hàm** **số** **liên** **tục**

Nếu hàm số  liên tục trên  thì .

Nếu hàm số  liên tục trên  thì

+ .

+  và .

+  và 

 Về mặt thực hành, sẽ đặt  cận trên  cận dưới  . Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

**II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP**

**Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến**

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện thì ta sẽ đặt 

1. Cho . Khi đó  bằng

**A. **. **B. **. **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Đặt . Khi  thì ;  thì .

Suy ra .

Vậy .

1. Cho  là hai hàm số liên tục trên  thỏa mãn điều kiện  đồng thời . Tính +2

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời** **giải**

Ta có: .

.

Đặt .

Ta được hệ phương trình:   

+ Tính 

Đặt .

.

+ Tính 

Đặt .



Vậy +2.

1. Cho  là hàm số liên tục trên tập xác đinh  và thỏa mãn .

Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

|  |
| --- |
|  |

**Lời** **giải**



Đặt 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
|  | 1 | 5 |

Suy ra .

**Câu 4.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Tính tích phân .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

Đặt , .

Đặt  .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

 .

Suy ra 

Đặt  .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

    .

Suy ra 

Khi đó, ta có: .

**Câu 5.** Cho hàm số . Tích phân  bằng

**A.**  **B. **  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

\* Đặt  .

- Đổi cận: 

 .

\* 



**Câu 6.** Cho hàm số  liên tục trên  và có  và Tính 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời** **giải**

Ta có 



+) Xét 

Đặt 

Với 



+) Xét 

Đặt 

Với 



Vậy 

**Câu 7.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Ta có: .

Xét .

Xét .

Đặt . Khi đó 

Vậy .

**Câu 8.** Cho hàm số  liên tục trên khoảng  và thỏa mãn  với mọi . Biết  với . Giá trị  bằng?

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

Từ giả thiết: 

, lấy tích phân 2 vế ta được:

 (1).

+) Xét .

Đặt .

Đổi cận:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Khi đó  (2).

+) Xét .

Đặt .

Đổi cận:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Khi đó  (3).

+) Xét .

Đặt .

Khi đó  (4).

Thế (2), (3), (4) vào (1) được: 

.

Kết hợp giả thiết ta suy ra được: ;;  .

Vậy .

**Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần**

Thông thường nếu bài toán xuất hiện  ta sẽ đặt 

**Câu 9. (Đề** **tham** **khảo** **2017)** Cho hàm số  thỏa mãn  và . Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời** **giải**

Đặt . Khi đó 

Suy ra 

Vậy .

**Câu 10.** Cho hàm số  liên tục trên  và . Tính 

**A.**  . **B.** . **C.**  **D.** 

**Lời giải**

Đặt , 



Tính 

Đặt  , khi đó 

Vậy .

**Câu 11.(HSG** **Bắc** **Ninh** **2019)** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thỏa mãn . Tính .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời** **giải**

Ta có: 

.

**Câu 12.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thỏa mãn  và . Tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**.

**Lời giải**

Thay  vào biểu thức ta được: .

Ta có:.

Đặt.

Đổi cận :.

Suy ra: .

Mà: .

.

.

Ta có: .

Đặt .

Suy ra: .

Vậy .

* **Lưu ý** **:** Ta có thể sử dụng tính chất 

**Câu 13.** Cho hàm số **** liên tục và có đạo hàm trên thỏa mãn  Biết rằng tích phân  ( với  là các số nguyên dương và  là phân số tối giản). Tính 

**A.  B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

Ta có:  (1)

Theo giả thiết:  

  (2)

Bằng cách đổi biến , ta có . (3)

Thay (3) vào (2), ta có  

Mặt khác do  nên lần lượt chọn  ta có

 .

Thay  và  vào (1) ta có 

Vậy  

**Câu 14.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn ;

. Tính tích phân .

**A. **. **B. **. **C. **. **D.** .

**Lời giải**

 Xét , đặt . Khi đó ;

. Do vậy . Suy ra .

 Xét , đặt . Khi đó ;

. Do vậy . Suy ra .

 Xét , đặt . Khi đó ; . Do vậy

.

**Câu 15.** Cho hàm số  liên tục trên và thỏa mãn. Biết . Tính?

**A.** . **B.** . **C.** . **D**..

**Lời giải**

Ta có .

Ta có .

Đặt 

Khi  ,khi 



Suy ra .

**Câu 16.**Cho hàm số liên tục trên và thỏa mãn . Khi

đó  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có: 





Xét  đặt .

Đổi cận: 



Từ (2) suy ra, 



Tính .

Đặt . Đổi cận: 



Đặt: 



Tính 

Cho  vào (1) ta có hệ phương trình sau:



Suy ra, .

**Câu 17. (Mã** **104** **-** **2019)** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên . Biết  và

, khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Đặt .

Suy ra .

Đặt .

.

.

Vậy .

**Câu 18.**Cho hàm số  có đạo hàm trên   với mọi

 và . Tính tích phân: .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**



.



Đặt 





Đặt 

Đổi cận 







Vậy .

**Dạng 1.3. Bài toán với điều kiện hàm ẩn có dạng:**



**Phương pháp giải:**



**Câu 19. (Mã** **104** **2018)** Cho hàm số  thỏa mãn  và 

với mọi . Giá trị của  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời** **giải**

**Chọn** **D**

Ta có: 

.

**Câu 20.**Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và . Biết

. Giá trị của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  nên hàm số  đồng biến trên   mà . Do đó: .

Từ giả thiết ta có: 

.

Suy ra: .

.

Vậy:  

**Câu 21.** Cho hàm số  và có đạo hàm  liên tục trên khoảng  thỏa mãn  và  Giá trị của biểu thức  bằng

**A.**   **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

Ta có: 



Mặt khác: 

Do đó: 

**Câu 22.** Cho hàm số  có đạo hàm  dương, liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và . Giá trị của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Do  dương trên đoạn , suy ra hàm số  đồng biến trên ,

. Do đó



.

Dễ thấy cả hai vế đều là các hàm số liên tục trên đoạn . Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế, ta được

.

Đặt .

Đổi cận , ta có

.

**Câu 23.** Cho hàm số  xác định và liên tục trên thỏa mãn , với mọi  đồng thời thỏa . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có 

Do đó  

Mặt khác  nên 

Vậy .

**Dạng 1.4. Bài toán với điều kiện hàm ẩn có dạng:**



**Câu 24.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Cách 1: PP tự luận:**

Từ  suy ra 

Do đó .

Đặt  ta có  do đó ta được

.

Vậy ta có 





.

Vậy .

**Cách 2: PP chọn hàm đại diện**

Từ đẳng thức  suy ra chọn đặt hàm số  là hàm số bậc 2 dạng  với .

Ta có .

Do đó 





.

Do vậy  thỏa mãn , từ đó ta có .

**Câu 25.** Cho hàm sốcó đạo hàm trên thỏa mãn và với mọiTính tích phân 

**A. B. C.  D. **

**Lờigiải**

Ta có:

Từ giả thiết

ĐặtĐổi biến 

ĐặtĐổi biến 

Khi đó 

Từ giả thiết ta suy ra

Như vậy: 

**Câu 26.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và  với mọi . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**



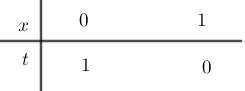




+) Tính . Đặt 

Đổi cận



+) Tính . Đặt 







**Câu 27.** Cho hàm số  liên tục trên đoạn  và thoả mãn . Tích phân  có kết quả dạng , , ,  tối giản. Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

.

Xét 

Xét .

Đặt .

Đổi cận , .

Nên 

Do đó .

Nên , , .

Vậy .

**Câu 28.** Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Với  ta có : 









Mặt khác : 



.

**Câu 29.** Cho hàm số  liên tục trên đoạn  thỏa mãn . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Lấy tích phân hai vế, ta có .

Xét tích phân . Đặt . Khi đó, ta có

.

Xét tích phân . Đặt . Khi đó, ta có

.

Xét tích phân . Đặt . Khi đó, ta có

.

Vậy .

**Dạng 1.5. Bài toán biến đổi giả thiết về đạo hàm của một tổng – hiệu; tích – thương.**

**Một số bài toán thường gặp**

**Bài toán 1.** Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thúrc 

**Phương pháp:**

Dễ dàng thấy rằng 

Do dó 

Suy ra 

Từ đây ta dễ dàng tính được 

**Bài toán 2.** Bài toán tích phân liên quan đến biếu thúrc 

(Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  ta được



Suy ra 

Từ đây ta dễ dàng tính được 

**Câu 30.**Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn điều kiện  và

 . Biết  . Giá trị của 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Xét trên đoạn , chia cả hai vế của phương trình  cho , ta được:

 .

Theo giả thiết,  nên thay  vào phương trình , ta được:

.

Thay  vào , ta được:

 . Vậy .

**Câu 31.** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên  và thỏa mãn các điều kiện sau:  và , . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

• Theo giả thiết: 





.

•  ⇒ .

• .

Khi đó:



**Câu 32.** Cho hàm số  liên tục và có đạo hàm tại mọi  đồng thời thỏa mãn điều kiện: và  Khi đó,  nằm trong khoảng nào?

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

Ta có:









Khi đó:





 .

**Câu 33.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên khoảng và thỏa mãn đẳng thức với mọi . Giá trị  của bằng

**A.** . **B.** .

**C.**  . **D.** .

**Lời giải**

Ta có



Vì hàm số  có đạo hàm liên tục với mọi  và thỏa mãn  vớ i nên ta thay  vào  ta được 

Suy ra 

**Câu 34.** Cho hàm số  có đạo hàm cấp 2 liên tục trên  thoả mãn . Biết . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có 



Vì  nên .

Vậy 

Khi đó



**Câu 35.** Cho hàm số  đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  và thỏa

mãn . Biết , . Khi đó  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời** **giải**

Theo bài ra ta có hàm số  đồng biến trên  do đó .

Ta có 

Theo đề bài 





.

Do đó .

**Câu 36.** Cho hàm số  không âm, có đạo hàm trên đoạn  và thỏa mãn ,

, . Tích phân  bằng

**A.** 1. **B.** 2. **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Xét trên đoạn , theo đề bài: 





 .

Thay  vào  ta được:  (vì ).

Do đó,  trở thành: 





 (vì  )

.

Vậy .

**Câu 37.** Cho hàm số  liên tục và nhận giá trị dương trên , thỏa mãn  và . Khi đó  thuộc khoảng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**.

**Lời giải**

. Do hàm số  liên tục và nhận giá trị dương trên  nên chia hai vế phương trình cho  ta được .

Nhân hai vế của phương trình  với  ta được: 

.

Trong đẳng thức  cho  ta được .



.

**Dạng 1.6. Biến đổi về dạng bình phương**

**Câu 38. (HSG Bắc** **Ninh** **2019)** Cho hàm số  liên tục và có đạo hàm trên  thỏa mãn . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

. .

Mà 

Suy ra .

Vì  nên , .

Vậy 



**Câu 39.** Cho hàm số  xá định trên  thỏa mãn

. Tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Ta có:



.

Do đó:







Suy ra , hay .

Bởi vậy:

.

**Câu** **40.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn ,  và . Tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

**Cách** **1:** Tính:. Đặt .

Ta có: 

.

Mà .

Ta có  (1).

 (2).

 (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra .

.

Do . Mà .

. Mà .

Do đó .

Vậy .

**Cách** **2:** Tương tự như trên ta có: 

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi , với .

Ta có .

Suy ra , mà  nên 

Do đó .

Vậy .

**Chú** **ý**: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số  và  liên tục trên đoạn .

Khi đó, ta có .

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số  liên tục và không âm trên đoạn  thì 

Xét tam thức bậc hai , với mọi 

Lấy tích phân hai vế trên đoạn  ta được

, với mọi  

Coi  là tam thức bậc hai theo biến  nên ta có 



 (đpcm)

**Câu 41.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  và . Biết . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Đặt . Khi đó:



.

**Cách** **1:** Ta có 

.

Do đó . Vậy .

**Cách** **2:** Sử dụng BĐT Holder.

.

Dấu “=” xảy ra .

Áp dụng vào bài ta có ,

suy ra .

Mà .

Vậy .

Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn ;  và . Tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Đặt .

Suy ra 



Ta có: .

Do đó, 

.

Vì  nên .

Vậy .

**Câu 42.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn ,  và . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Đặt , 

Ta có 



Tính được  

.

Do .

Vậy .

**Câu 43.**Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và

. Tích phân  bằng?

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**





Xét .

Đặt .



Do đó:





Mà   

Do đó 

**Câu 44.**Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thỏa ,  với mọi  thuộc . Giá trị của  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Đặt .

Dùng tích phân từng phần, ta có: .

.

Ta có 

, .

Mà .

Hay 

**Câu 45.** Cho hàm số  có đạo hàm và liên tục trên đoạn , thỏa mãn  với mọi  thuộc đoạn  và . Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Theo giả thiết ta có .

Lấy tích phân hai vế của biểu thức  ta được

Vì .

Vậy 

**III. HỆ THỐNG CÂU HỎI ÔN TẬP**

1. **Một sô câu hỏi trắc nghiệm**

**Câu** **1. (Đề** **tham** **khảo** **BGD** **năm** **2017-2018)** Cho hàm số  xác định trên  thỏa

mãn ,  và . Giá trị của biểu thức  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 2.**Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn  và . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 3: (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Cho hàm số  thỏa mãn  và với mọi  . Giá trị của bằng .

**A.** ****. **B.** . **C.**. **D.** .

**Câu 4:** Cho  là hàm số liên tục trên  thỏa mãn  với mọi  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 5.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Biết . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 6.** Cho hàm số .  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . D****

**Câu 7.** Cho hàm số  có đạo hàm trên  thỏa mãn  và . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 8.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu** **9:**Cho hàm số  liên tục trên  và có . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 10.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn , với mọi  và . Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 11.**Cho hàm số  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn . Biết  và , với mọi . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 12.** Cho hàm số  liên tục trên  và các tích phân  và , tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 13:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và . Tính tích phân .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 14.**Cho hàm số  liên tục trên , thỏa mãn  và . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 15.**Cho hàm số  liên tục trên  và thoả mãn , với mọi . Xác định giá trị  để .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 16.** Cho hàm số  liên tục trên đoạn  thỏa mãn . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 17.**Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thỏa mãn các điều kiện  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 18.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thoả mãn  với mọi số thực . Tính .

**A. **. **B. **. **C.** . **D.** .

**Câu 19.** hàm số  có đồng biến và có đạo hàm liên tục trên , thỏa mãn , . Tính 

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 20.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. **Hướng dẫn giải**

**Câu** **1. (Đề** **tham** **khảo** **BGD** **năm** **2017-2018)** Cho hàm số  xác định trên  thỏa

mãn ,  và . Giá trị của biểu thức  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

Ta có: , với mọi .

+ Xét trên . Ta có , suy ra .

Do đó, , với mọi . Suy ra .

+ Xét trên . Ta có , suy ra .

Do đó, , với mọi . Suy ra .

Vậy .

**Câu 2.**Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn  và . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

• Xét , đặt 

Đổi cận: ; 

 .

• , đặt 

Đổi cận: ; 



Vậy .

**Câu 3: (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Cho hàm số  thỏa mãn  và với mọi  . Giá trị của bằng .

**A.** ****. **B.** . **C.**. **D.** .

**Hướng** **dẫn** **giải**

Ta có .

Do đó 

Theo giả thiết 

Từ đó suy ra .

**Câu 4:** Cho  là hàm số liên tục trên  thỏa mãn  với mọi  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có , với mọi  nên suy ra , với mọi .

 hay 

.

**Câu 5.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Biết . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh**

Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn điều kiện . Khi đó 

Chứng minh:

Đặt , với . Đổi cận: khi ; khi 

Ta có 



.

Áp dụng tính chất trên với , .

 liên tục trên  và thỏa mãn .

Khi đó.

**Cách 2: Đổi biến trực tiếp:**

Đặt , với .

Ta có 



**Câu 6.** Cho hàm số .  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Đặt .

Với .

Với .



.

**Câu 7.** Cho hàm số  có đạo hàm trên  thỏa mãn  và . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có: .



Do 

.

Ta có: 

Xét .

Đặt 

Vậy .

**Câu 8.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

\* .

Đặt .

Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Khi đó  .

\* .

Đặt .

Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Khi đó  .

\* Tính . Đặt .

Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Khi đó .

**Câu** **9:**Cho hàm số  liên tục trên  và có . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải

Có 

Tính .Đặt 

Đổi cận : .



Tính . Đặt . Đổi cận : .



Vậy .

**Câu 10.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn , với mọi  và . Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Theo giả thiết,  và  nên

 .

Ta có:



Suy ra: .

Mặt khác, ta có:



Suy ra: 

Vậy .

**Câu 11.**Cho hàm số  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn . Biết  và , với mọi . Tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Cách 1:** Theo giả thiết, ta có  và  nhận giá trị dương nên

.

Mặt khác, với , ta có  và  nên .

Xét , ta có 

Đặt  

Suy ra  .

Đến đây, đổi biến . Khi  và .

Ta có 

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên  .

Từ  và  ta cộng vế theo vế, ta được 

Hay .

**Cách 2 (Trắc nghiệm)**

Chọn hàm số  , khi đó:

.

**Câu 12.** Cho hàm số  liên tục trên  và các tích phân  và , tính tích phân .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Xét .

Đặt 

Khi  thì ; khi  thì .

Nên . Suy ra .

Mặt khác .

Do đó .

**Câu 13:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và . Tính tích phân .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

Xét 

Đặt 

Suy ra 

Xét 

Ta có : 

Suy ra  (do )



Do  nên 

Vậy .

**Câu 14.** Cho hàm số  liên tục trên , thỏa mãn  và . Tính .

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

+) ta có:









+) Vì .

**Câu 15.** Cho hàm số  liên tục trên  và thoả mãn , với mọi . Xác định giá trị  để .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Theo đề ta có , với  là hằng số, suy ra .

Mặt khác, lấy tích phân cận từ 0 tới 2 hai vế của (1) ta được

.

Suy ra . Thử lại thấy thoả mãn , với mọi .

Khi đó .

Vậy .

**Câu 16.** Cho hàm số  liên tục trên đoạn  thỏa mãn . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Từ giả thiết , lấy tích phân từ 0 đến 1 của 2 vế ta được



Đặt , , .

+) Đặt  ta được 

+) Đặt  ta được .

Từ đó ta được 

+) Đặt  ta được , suy ra .

**Câu 17.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thỏa mãn các điều

kiện  và . Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Với , ta có:







Ta có: .

Khi đó: .

Vậy: .

**Câu 18.** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  và thoả mãn  với mọi số thực . Tính .

**A. **. **B. **. **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có: 

Suy ra: 

Chọn .

**Câu 19.** hàm số  có đồng biến và có đạo hàm liên tục trên , thỏa mãn , . Tính 

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

• Ta có: 



Suy ra: 

(do hàm số  đồng biến và có đạo hàm liên tục trên  nên )

.

• Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

.

Mà  nên 

Vậy 

Suy ra: .

**Câu 20.** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

Ta có: 





.

. 

Xét .

Xét .

Do đó  .

Ta lại có 



Từ và suy ra .